228
235
236
239

**Développement : Intégrale de Dirichlet**

**Théorème :** $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

**Démo :** Dans cette démonstration, on va utiliser les théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe intégral de manière abondante.

(1)

On pose

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} \end{array}$$

$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

Pour $x > 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 par $f(x,0) = 1$.

Lorsque $t \to +\infty$, $f(x,t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ car à $x$ fixé, $\left|t^2 e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\right| \leq t e^{-xt} \to 0$

donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$F : x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dt \text{ est bien définie.}$$

(2) Montrons que F est bien définie en 0.

$-\cos$ et $\frac{1}{t}$ $C^1$ sur $[1,X]$

Par intégration par parties, on a $\forall X \geq 1$ : $\int_1^X \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^X - \int_1^X \frac{\cos t}{t^2} dt$

Or $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est un $\underset{+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc intégrable sur $[1,+\infty[$

On peut passer à la limite quand $X \to +\infty$. On obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt \quad \text{donc F est définie en 0}$$

(3) Montrons que F est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$f$ est de classe $C^\infty$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (par rapport à chacune de ses variables). Soit $a > 0$ et $x \geq a$, $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\frac{t}{t} e^{-xt} \sin(t)\right| \leq e^{-at}$ int sur $\mathbb{R}_+$.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, F est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t)\, dt = -\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt\right)$$

$$= -\mathrm{Im}\left(\frac{1}{i - x}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tq $\forall x > 0$, $F(x) = C - \arctan(x)$

* car $\frac{\sin t}{t} \leq 1 \ \forall t$

Puisque $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ donc $C = \frac{\pi}{2}$

④ <u>Montrons que $F(0) = \frac{\pi}{2}$ ie $F$ est continue en $0$.</u>

On serait tenté d'appliquer le théorème de convergence dominée mais on ne peut pas car $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable (cf annexe).

On décompose l'intégrale en deux morceaux $F_1(x) := \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\,dt$ $F_2(x) := \int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t}\,dt$

- $F_1$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-xt} |\sin t| \leq 1$ intégrable sur $[0,1]$

- Montrons que $F_2$ est continue en $0$. On pose $G(x) := \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,dt$ dont $F_2$ est la partie imaginaire.

Soit $X \geq 1$, par intégration par parties : $\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,dt = \left[\frac{1}{i-x} \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\right]_1^X + \frac{1}{i-x} \int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,dt$

Or $\left|\frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, on en déduit en passant à la limite que :

$$G(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,dt$$

Or $\underset{\mathbb{R}_+ \times [1,+\infty[}{(x,t)} \longmapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est continue et dominée par la fonction intégrable $t \mapsto \frac{1}{t^2}$

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, $G$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc $F_2$ aussi, et donc $F$ également.

<u>Conclusion</u> : $F(0) = \int^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$

---

<u>Annexe</u> : Soit $N \in \mathbb{N}$, $\int_0^{N\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \underset{t = x + k\pi}{=} \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x)|}{x+k\pi}\,dx$

$\geq \sum_{k=0}^{N-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(x)|}{\pi + k\pi}\,dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} \int_0^{\pi} |\sin(x)|\,dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty$

Remarque : $\sin x = |\sin x|$ sur $[0,\pi]$ :